Fachhochschule Graubünden
University of Applied Sciences

Introduction to Computational Science

(CDS-1012) HS 2024

Prof. Dr. rer. nat. habil. Ralf-Peter Mundani

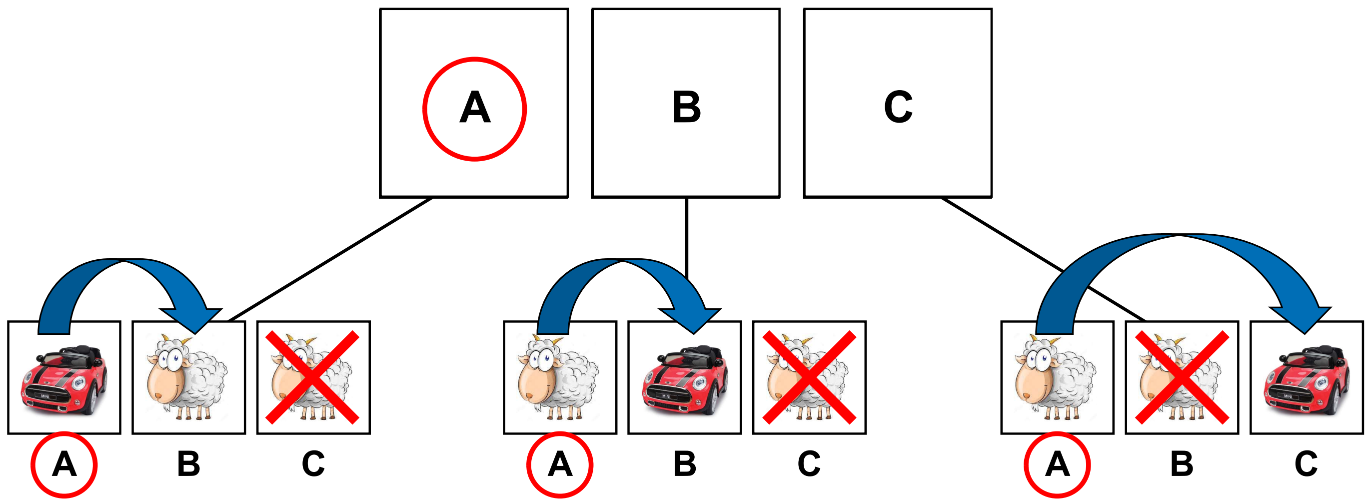
DAViS

Einleitung

- Überblick
  - Einführung in die Spieltheorie
    - Modellierung und Definitionen
    - Spiele in reinen Strategien
    - Nash-Gleichgewicht und dominante Strategien
  - Zwei-Personen-Nullsummenspiele
    - konservative Strategien
  - Spiele in gemischten Strategien
    - Berechnung von Sattelpunkten
  - Mehrheitsbeschlüsse / Gruppenentscheidungen ($\rightarrow$ Teil 2)

Motivation aus der Stochastik: Ziegenproblem (a.k.a. Monty-Hall-Dilemma)

- Spielshow: 3 Türen – zwei Nieten (Ziege) und ein Gewinn (Auto)
  - SpielerIn wählt Tür, ShowmasterIn öffnet andere Tür (Ziege) ➔ Strategie: Wahl ändern…?



Quellen: depositphotos.com, jamara.com

  - die anderen beiden Fälle (SpielerIn wählt Tür B oder C) sind symmetrisch
  - in drei Fällen (3/9) Verlust, in sechs Fällen (6/9) Gewinn ➔ Wahl ändern ✓

Einführung in die Spieltheorie

- Grundlagen
  - Definition: Spieltheorie
    - Teilgebiet der Mathematik („*Theorie des strategischen Denkens*“)
    - Modellierung von Entscheidungssituationen (oftmals im sozialen Konflikt)
    - Idee: Erfolg hängt nicht nur von eigener, sondern auch von Entscheidungen anderer ab
    - Anwendungsgebiete: vor allem Wirtschaftswissenschaften und Ökonomie
    - bekannte Vertreter: John von NEUMANN, John Forbes NASH
  - Unterscheidung zwischen
    - kooperativen / nicht-kooperativen Spielen
    - simultanen / sequentiellen Spielen

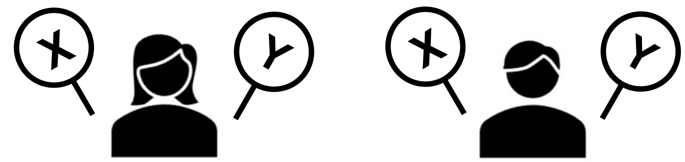
Einführung in die Spieltheorie

- Grundlagen (Fortsetzung)
  - Entscheidungen können getroffen werden unter
    - Gewissheit: alle Aktionen / Konsequenzen sind bekannt
    - Risiko: (bestimmte) Wahrscheinlichkeiten von Aktionen / Konsequenzen sind bekannt
    - Unsicherheit: keine Aktionen / Konsequenzen sind bekannt
  - Modellierung
    - Menge von SpielerInnen $N = \{1, 2, \ldots, n\}$
    - Menge der Aktionen (auch als Strategie bezeichnet) A_i von SpielerIn i für alle $i \in N$
    - Menge der Aktionsprofile (auch Strategieprofile) $A = \{(a_i)_{i \in N}, a_i \in A_i$ für alle $i \in N\}$
    - Auszahlungsfunktion $u_i : A \rightarrow \mathbb{R}$ für SpielerIn i

Einführung in die Spieltheorie

- Grundlagen (Fortsetzung)

  - Beispiel: Entscheidung zwischen zwei Möglichkeiten
    - Aktionen: $A_1 = \{X,\ Y\}$ und $A_2 = \{X,\ Y\}$
    - Aktionsprofile: $\mathrm{A} = \{(X,\ X),\ (X,\ Y),\ (Y,\ X),\ (Y,\ Y)\}$
    - Auszahlungsfunktion: $u_{1,2} : A \to (1,\ 0,\ 0,\ 1)$



  - Frage: Wie verändert sich das Spiel, wenn folgende Auszahlungsfunktionen gelten…?
    - SpielerIn 1: $u_1 : A \to (1,\ 0,\ 0,\ 0)$
    - SpielerIn 2: $u_2 : A \to (0,\ 0,\ 0,\ 1)$

Einführung in die Spieltheorie

- eine erste Unterscheidung
  - kooperative Spiele
    - alle SpielerInnen suchen nach gemeinsamen Aktionen, die optimal für die Gruppe sind
    - SpielerInnen können Absprachen vor dem Spiel tätigen
  - nicht-kooperative Spiele
    - alle SpielerInnen maximieren ihre Auszahlung durch Wahl ihrer besten Strategie (auf Basis dessen, was sie von den Strategien der anderen kennen/wissen)
    - SpielerInnen haben keinerlei Vereinbarungen über gemeinsame Aktionen, die optimal für die Gruppe sind
    - SpielerInnen können keine Absprachen vor dem Spiel tätigen
  - nicht-kooperative Spiele haben ein weite Verbreitung in Literatur und Anwendungen

Einführung in die Spieltheorie

- eine zweite Unterscheidung
  - simultane Spiele
    - alle SpielerInnen treffen ihre Wahl ein für alle Mal (nur ein Durchlauf) und gleichzeitig
    - es gibt eine übliche Darstellung in Normalform (z.B. Gefangenendilemma)
  - sequentielle Spiele
    - es gibt eine spezifische Ordnung, welche(r) SpielerIn wann entscheiden darf
    - in jedem Schritt haben SpielerInnen, die entscheiden dürfen, vollständiges oder unvollständiges Wissen über den aktuellen Status (d.h. frühere Entscheidungen)
    - die übliche Darstellungsform ist extensiv oder als Baum

Spielen in reinen Strategien

- Gefangenendilemma (das wohl bekannteste nicht-kooperative Spiel in reinen Strategien)
  - Hintergrund
    - zwei Gefangene werden beschuldigt, gemeinsam ein Verbrechen verübt zu haben
    - beide Gefangenen werden getrennt vernommen und können nicht kommunizieren
    - mangels konkreter Beweise kann beiden nur ein Teil der Tat nachgewiesen werden
  - mögliche Aktionen
    - leugnen (L): niedrige Strafe (2 Jahre)
    - gestehen (G): hohe Strafe (5 Jahre) oder Höchststrafe (8 Jahre $\rightarrow$ Kronzeugenregel)
  - Maximierung der Auszahlung
    - Funktion u_i modelliert den Gewinn an Freiheit (also Höchststrafe – tatsächlicher Strafe)

Spielen in reinen Strategien

- Gefangenendilemma (Fortsetzung)
    - Darstellung in Normalform (bei zwei SpielerInnen auch Bimatrixform genannt)

A_2

A_1	L	G
L	(6, 6)	(0, 8)
G	(8, 0)	(3, 3)

(u_1,u_2)

- Frage: wie finden beide SpielerInnen die für sich beste Strategie…?

Spielen in reinen Strategien

- ein bisschen Mathematik ☺
  - Nash-Gleichgewicht
    - ein Aktionsprofil bildet ein Nash-Gleichgewicht, wenn keine SpielerIn eine höhere Auszahlung erhalten kann, indem sie von ihrer Entscheidung (einseitig) abweicht, d.h. während alle anderen SpielerInnen auf ihren Entscheidungen beharren
    - formal: ein Aktionsprofil $(a_1^*, \ldots, a_i^*, \ldots, a_n^*)$ bildet genau dann ein Nash-Gleichgewicht, wenn keine der SpielerInnen durch Abweichung davon eine höhere Auszahlung erzielen kann, d.h. wenn gilt

$$u_i(a_1^*, \ldots, a_i^*, \ldots, a_n^*) \geq u_i(a_1^*, \ldots, a_i, \ldots, a_n^*) \text{ für alle } a_i \in A_i \text{ und } i \in N.$$

    - Frage: was bedeutet das für das Gefangenendilemma…?

Spielen in reinen Strategien

- ein bisschen Mathematik (Fortsetzung)
  - Nash-Gleichgewicht für Aktionsprofil (G, G)

S_2

S_1

	L	G
L	~~(6, 6)~~	~~(0, 8)~~
G	~~(8, 0)~~	$\boxed{(3, 3)}$

Spielen in reinen Strategien

- ein bisschen Mathematik (Fortsetzung)
  - dominante Strategie
    - Definition (schwache Dominanz): Für zwei Strategien a_i^*, $a_i \in A_i$ heisst Strategie a_i^* schwach dominant über Strategie a_i, wenn a_i^* mindestens so gut ist wie a_i für alle möglichen Aktionen der anderen SpielerInnen $a_j \in A_{j \neq i}$, d.h.

$$u_i(a_1, \ldots, a_i^*, \ldots, a_n) \geq u_i(a_1, \ldots, a_i, \ldots, a_n) \text{ für alle } a_j \in A_{j \neq i}\,.$$

    - gilt die Ungleichung im strengen Sinn (>), dann wird von starker Dominanz gesprochen, d.h. Strategie a_i^* ist stark dominant über Strategie a_i
    - Profile dominanter Strategien führen zu Nash-Gleichgewichten (Umkehrung nicht gültig)
    - nochmals Frage: was bedeutet das für das Gefangenendilemma…?

Spielen in reinen Strategien

- ein bisschen Mathematik (Fortsetzung)
  - stark dominante Strategie beider SpielerInnen ist G

S_2

S_1	L	G
L	(6, 6)	(0, 8)
G	(8, 0)	(3, 3)

  - ABER: Gleichgewicht (G, G) ist ineffizient, da (L, L) eine bessere Auszahlung ergeben würde

Spielen in reinen Strategien

- weiteres Beispiel: Falke-und-Taube-Spiel
  - Szenario: zwei Wettkämpfer müssen sich zwischen aggressivem (Falke) und nicht-aggressivem (Taube) Verhalten entscheiden
  - wurde von den USA für strategische Analysen während der Kuba-Krise genutzt
  - Spiel dann interessant, wenn Kosten für den Kampf (C) die Kosten bzw. den Wert des Sieges (V) überschreiten, d.h. $C > V > 0$

	F	T
F	$\left(\frac{V-C}{2}, \frac{V-C}{2}\right)$	$(V, 0)$
T	$(0, V)$	$\left(\frac{V}{2}, \frac{V}{2}\right)$

dominante Strategie…? ✗

Nash-Gleichgewicht…? ✓×2

Spielen in reinen Strategien

- Übung: Steuerhinterziehung
  - Unternehmen Zanoma[1] hat durch *kreative Buchführung* 200M CHF nicht versteuert
  - wird Zanoma durch privaten Steuerprüfer die Steuerhinterziehung nachgewiesen, so muss das Unternehmen eine Nachzahlung von s Millionen CHF (Steuer plus Busse) leisten
  - Steuerprüfer bekommt im Erfolgsfall 5% der Nachzahlung als Prämie

  - Steuerprüfer hat Strategien Prüfung (P; Kosten: 10M CHF) und keine Prüfung (KP; Kosten: 0)
  - Zanoma hat Strategien Steuerhinterziehung (S) und keine Steuerhinterziehung (KS)

  - Fragen
    a) wie sieht die dargestellte Situation als Spiel in Bimatrixform aus…?
    b) gibt es für $s < 200$M CHF dominante Strategien und Nash-Gleichgewichte…?

[1] jede Ähnlichkeit mit real existierenden Unternehmen ist rein zufällig

Spielen in reinen Strategien

- Übung: Steuerhinterziehung (Fortsetzung)

Steuerprüfer

Zanoma	P	KP
S	$(200 - s, 0.05*s - 10)$	$(200, 0)$
KS	~~$(0, -10)$~~	~~$(0, 0)$~~

  - falls $s < 200$ folgt damit $200 - s > 0 \rightarrow$ S ist strikt dominante Strategie
  - falls $s < 200$ folgt damit $0.05*s - 10 < 0 \rightarrow$ KP ist strikt dominante Strategie

Zwei-Personen-Nullsummenspiele

- Einführung
  - Idee: Gewinn einer SpielerIn ist Verlust der anderen (d.h. Summe ist immer Null)

$$u_1(a_1, a_2) = -u_2(a_1, a_2) \text{ für alle } (a_1, a_2) \in A_1 \times A_2$$

  - SpielerInnen versuchen, Gewinn zu maximieren (d.h. Gewinn der anderen zu minimieren)
  - Darstellung von 2PNS-Spielen üblicherweise in Normalform (oder Matrixform)

P_2 (max)

(min)
P_1 (~~max~~)

	S_{21}	S_{22}
S_{11}	$(\cancel{1}, -1)$	$(\cancel{-3}, 3)$
S_{12}	$(\cancel{-5}, 5)$	$(\cancel{-1}, 1)$

Matrixform

P_2 (max)

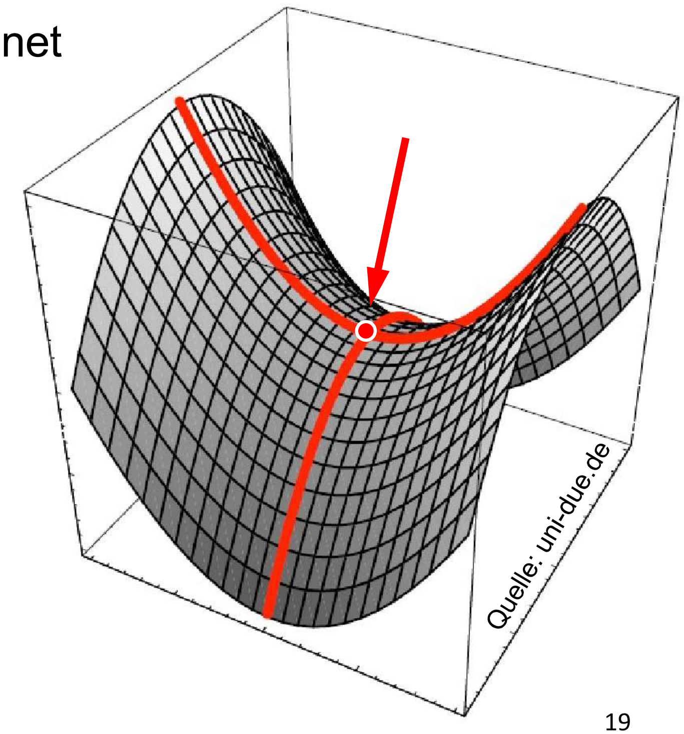
P_1 (min)

	S_{21}	S_{22}
S_{11}	-1	3
S_{12}	5	1

u_2 bzw. $-u_1$

Zwei-Personen-Nullsummenspiele

- Einführung (Fortsetzung)
  - in Matrixform wird SpielerIn P_1 zur MinimiererIn (auch ZeilenspielerIn genannt) und SpielerIn P_2 zur MaximiererIn (auch SpaltenspielerIn genannt)
  - 2PNS-Spiele werden daher auch als *MinMax*-Spiele bezeichnet
  - aufgrund der speziellen Struktur von 2PNS-Spielen nehmen Nash-Gleichgewichte die Form von Sattelpunkten an (→ Schnittpunkt von Minimum und Maximum)
  - Idee bleibt gleich: keine SpielerIn kann sich durch einseitigen Strategiewechsel verbessern



Zwei-Personen-Nullsummenspiele

- Definition: konservative Strategien
  - Beobachtung: beste gegnerische Strategie führt zu eigenem schlechtesten Gewinn
  - konservative Strategie: wähle den besten Wert aus allen ungünstigsten Fällen
  - MinimiererIn P_1: $U_- = \min_i \max_j a_{ij}$
    - für jede Strategie i: maximiere über alle Spalten j ($\Rightarrow$ grösstmöglicher Verlust)
    - wähle Minimum aller Spaltenmaxima $\rightarrow$ konservative Strategie i^* (Obergrenze U_-)
  - MaximiererIn P_2: $U_+ = \max_j \min_i a_{ij}$
    - für jede Strategie j: minimiere über alle Zeilen i ($\Rightarrow$ kleinstmöglicher Gewinn)
    - wähle Maximum aller Zeilenminima $\rightarrow$ konservative Strategie j^* (Untergrenze U_+)
  - Min-Max-Theorem: Sattelpunkt existiert genau dann, wenn $U_- = a_{i^*j^*} = U_+$

Zwei-Personen-Nullsummenspiele

Quelle: google.ch

- Beispiel: Schlacht in der Bismarcksee (2–4. März 1943)
  - Ausgangssituation: Japaner wollen Truppen und Material von Rabaul (Bismarck-Archipel) nach Lae (Papua-Neuguinea) verlegen
  - es stehen zwei mögliche Routen zur Verfügung
    - regnerische Nordroute
    - sonnige Südroute
  - japanischer Konvoi ist unabhängig von gewählter Route drei Tage unterwegs
  - U.S. Air Force wird über Verlegung informiert und möchte den Konvoi bombardieren
  - allerdings stehen nicht genügend Flugzeuge zur gleichzeitigen Überprüfung beider Routen zur Verfügung → Amerikaner müssen eine Entscheidung fällen

Zwei-Personen-Nullsummenspiele

- Beispiel: Schlacht in der Bismarcksee (Fortsetzung)
  - falls Amerikaner richtige Route überprüfen, kann Bombardierung sofort begonnen werden (andernfalls verbleiben zwei Tage für die andere Route)
  - auf Nordroute muss wegen schlechter Sicht zudem die Bombardierung einen Tag ausbleiben
  - damit ergibt sich folgendes 2PNS-Spiel (Gewinn $\equiv$ mögliche Tage für Bombardierung)

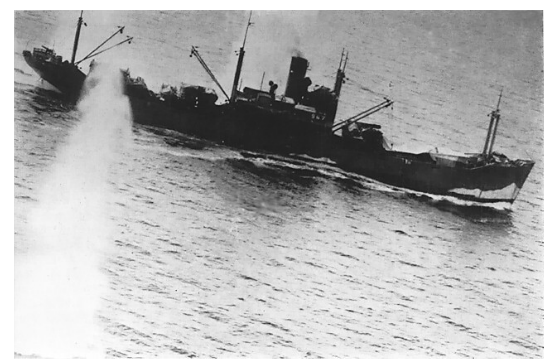
U.S. Air Force (max)

Japan (min)	N	S
N	2	1
S	2	3

$\Rightarrow$ $i^* =$ N und $U_- = 2$

$\Rightarrow$ $j^* =$ N und $U_+ = 2$

$\Rightarrow$ Sattelpunkt bei (N, N)



Quelle: ibiblio.org

Spielen in gemischten Strategien

- Vorbemerkung
  - reine Strategien
    - SpielerIn legt sich (a-priori) auf eine Strategie fest
    - Nachteil: Vorhersehbarkeit durch MitspielerInnen
    - Beispiel: Schere (100%), Stein (0%), Papier (0%)
  - gemischte Strategien
    - SpielerIn entscheidet zufällig zwischen Strategien
    - formal: Charakterisierung einer Wahrscheinlichkeitsfunktion über (reinen) Strategien
    - Beispiel: Schere (25%), Stein (50%), Papier (25%)
  - ABER: reine Strategien führen häufig nicht zu Nash-Gleichgewichten

Spielen in gemischten Strategien

- nochmal Min-Max-Theorem
  - nicht jedes 2PNS-Spiel in reinen Strategien hat einen Sattelpunkt
- Beispiel

P_2 (max)

P_1 (min)

	S_{21}	S_{22}	$\max_j$	$\min_i$
S_{11}	-1	3	3	**3**
S_{12}	5	1	5	
$\min_i$	-1	1		
$\max_j$	**1**			

$\rightarrow i^* = S_{11}$ und $U_- = 3$

$\rightarrow j^* = S_{22}$ und $U_+ = 1$

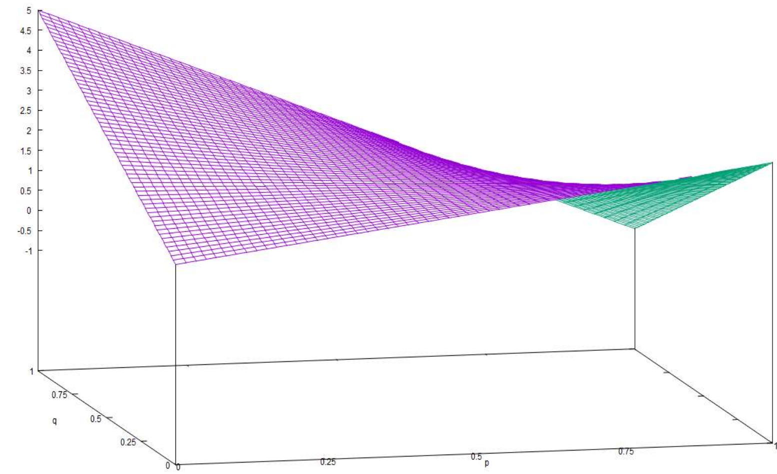
$\boxed{\rightarrow \text{kein Sattelpunkt}}$

Spielen in gemischten Strategien

- nochmal Min-Max-Theorem (Fortsetzung)
  - 2PNS-Spiele in gemischten Strategien haben immer einen Sattelpunkt
- Einführung von Wahrscheinlichkeiten
  - SpielerIn P_1: spielt mit Wahrscheinlichkeit p Strategie S_{11} und mit $1-p$ Strategie S_{12}
  - SpielerIn P_2: spielt mit Wahrscheinlichkeit q Strategie S_{21} und mit $1-q$ Strategie S_{22}
  - für den Fall $n > 2$ Strategien
    - Wahrscheinlichkeiten $p_1, p_2, \ldots, p_n$ je Strategie mit $\sum_{i=1}^{n} p_i = 1$
- Bestimmung des Sattelpunkts
  - Multiplizieren des 2PNS-Spiels mit Wahrscheinlichkeiten p und q
  - Lösung der zugehörigen Gleichung (oftmals durch lineare Programmierung)

Spielen in gemischten Strategien

- Beispiel



			q	$1-q$
			S_{21}	**S_{22}**
P_1 (min)	p	**S_{11}**	–1	3
	$1-p$	**S_{12}**	5	1

P_2 (max)

$$\Rightarrow -1 * p * q \ + \ 3 * p * (1-q) \ + \ 5 * (1-p) * q \ + \ 1 * (1-p) * (1-q) \stackrel{!}{=} 0$$

$$\Rightarrow -8 * p * q \ + \ 2 * p \ + \ 4 * q \ + \ 1 = 0$$

$\Rightarrow$ Sattelpunkt der Funktion (graphisch[1]) bei $p = 0.5$ und $q = 0.25$

[1] bspw. mit gnuplot (http://www.gnuplot.info) über > f(x,y) = -8*x*y + 2*x + 4*y + 1 und > splot [0:1][0:1] f(x,y)

Spielen in gemischten Strategien

- alternative Berechnung (als reine Strategien) aus jeweiliger Sicht von SpielerIn P_1 und P_2

			P_2 (max)	
			q	$1-q$
			S_{21}	S_{22}
P_1 (min)	p	S_{11}	-1	3
	$1-p$	S_{12}	5	1

Sicht P_2

$$\underbrace{-1 * p \;+\; 5 * (1-p)}_{S_{21}} \;=\; \underbrace{3 * p \;+\; 1 * (1-p)}_{S_{22}}$$

$$4 * (1-p) \;=\; 4 * p$$

$$p \;=\; 0.5$$

Sicht P_1

$$\underbrace{-1 * q \;+\; 3 * (1-q)}_{S_{11}} \;=\; \underbrace{5 * q \;+\; 1 * (1-q)}_{S_{12}}$$

$$2 * (1-q) \;=\; 6 * q$$

$$q \;=\; 0.25$$

Sattelpunkt bei (0.5, 0.25); durch Einsetzen von p in S_{21} oder S_{22} sowie q in S_{11} oder S_{12} ergibt sich $U_- = 2 = U_+$

Spielen in gemischten Strategien

- nochmal Aufgabe: Steuerhinterziehung
  - c) wie ändert sich die Situation für den Fall $s > 200$M CHF…?

Steuerprüfer

Zanoma	P	KP	
S	$(\underbrace{200 - s}_{<0}, \underbrace{0.05 * s - 10}_{>0})$	(200, 0)	p
KS	(0, –10)	(0, 0)	$1-p$
	q	$1-q$	

- Problem: keine dominante Strategie / kein Nash-Gleichgewicht in reinen Strategien

Spielen in gemischten Strategien

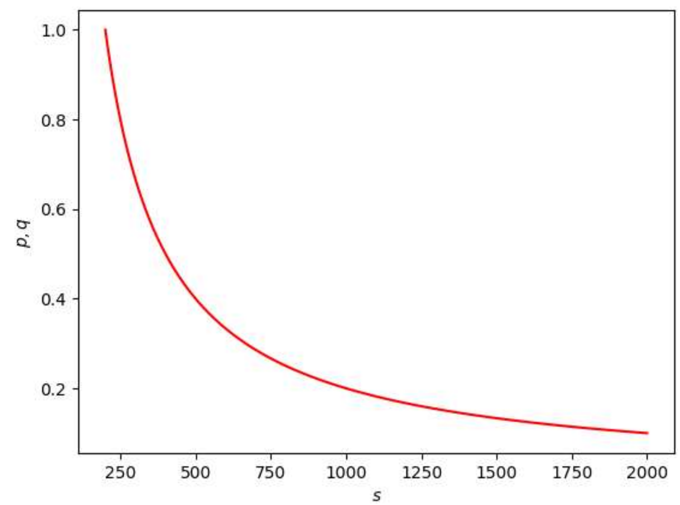
- nochmal Aufgabe: Steuerhinterziehung (Fortsetzung)
  - aus Sicht von Zanoma

$$(200 - s)\cdot q + 200\cdot(1 - q) \;=\; 0\cdot q + 0\cdot(1 - q) \quad \Leftrightarrow \quad q = 200/s$$

  - aus Sicht des Steuerprüfers

$$(0.05\cdot s - 10)\cdot p - 10\cdot(1 - p) \;=\; 0\cdot p + 0\cdot(1 - p) \quad \Leftrightarrow \quad p = 200/s$$

  - d.h. Nash-Gleichgewicht in gemischten Strategien somit für $p = q$, d.h. für $(200/s, 200/s)$
  - in anderen Worten: höhere Nachzahlungen (Bussen) senken gleichermaßen Wahrscheinlichkeit, mit der Steuerprüfer kontrolliert als auch mit der Steuerhinterziehung für Zanoma attraktiv wird ☺



Checkpoints

- welche Begrifflichkeiten sollten klar sein…?
  - Spiele in reinen Strategien
    - Darstellung in Normalform / Bimatrixform
    - dominante Strategie
    - Nash-Gleichgewicht
  - Zwei-Personen-Nullsummenspiele
    - Darstellung in Matrixform
    - konservative Strategien ($\Rightarrow$ MinimiererIn / MaximiererIn)
  - Spiele in gemischten Strategien
    - Gleichgewichtspunkte / Sattelpunkt

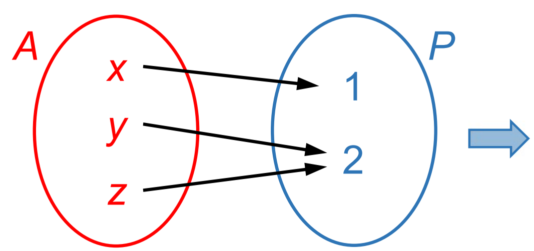
Gruppenentscheidungen

- Problemstellung
  - Situation: verschiedene Möglichkeiten (Entscheidungsvarianten: Wahlen, Wettbewerbe, …)
  - Ziel: gemeinsame Bestimmung einer Rangfolge der Möglichkeiten
  - Beispiel: WählerInnen → KandidatInnen (Wahl), Publikum → TeilnehmerInnen (Wettbewerb)
  - ABER: nicht alle werden mit der Rangfolge einverstanden sein (Stichwort: Unzufriedenheit)
- axiomatischer Ansatz
  - Aufstellung von Eigenschaften und Prüfung, welche Entscheidungsverfahren sie erfüllen
  - Modellierung individueller Präferenzen und der Entscheidungsverfahren selbst
  - ABER: Situationen mit unerwünschten Ergebnissen in der Regel nicht vermeidbar

Gruppenentscheidungen

- Rangabbildungen
  - Situation: endliche Menge A von Möglichkeiten (z.B. KandidatInnen, SängerInnen, Pläne, …)
  - Präferenzen entstehen durch Vergabe von Rangnummern $r(x)$ mit $x \in A$
  - für zwei Möglichkeiten x, $y \in A$ bedeutet $r(x) < r(y)$, dass x gegenüber y bevorzugt wird
  - zwei (oder mehr) Möglichkeiten können auch dieselbe Rangnummer erhalten

  - Definition: eine Rangabbildung $r : A \to \mathbb{N}$ ist eine surjektive Abbildung[1] der Menge von Möglichkeiten A auf eine Menge von Präferenzen $P = \{1, \ldots, k\} \subset \mathbb{N}$
  - Beispiel



$r(x) = 1$

$r(y) = r(z) = 2$

[1] Surjektivität: jedes Element der Bildmenge hat (mindestens) ein zugehöriges Element in der Urbildmenge

Gruppenentscheidungen

- Relationen
  - Idee: Beschreibung von Beziehungen (z.B. Rangfolgen, Präferenzen) zwischen Elementen
  - Darstellung als Relation R auf Paaren (x, y) von Elementen aus A
  - formal geschrieben als $(x, y) \in R$ oder abkürzend als $x\ R\ y$
  - Beispiel: mit R ist '$<$' (kleiner) und $x\ R\ y$ folgt $x < y$

- Eigenschaften von Relationen
  - transitiv: mit $x\ R\ y$ und $y\ R\ z$ folgt auch $x\ R\ z$ (z.B. aus $2 < 3$ und $3 < 4$ folgt $2 < 4$)
  - reflexiv: $x\ R\ x$ gilt für alle $x \in A$ (z.B. $2 \leq 2$)
  - asymmetrisch: $x\ R\ y$ und $y\ R\ x$ gelten niemals gleichzeitig (z.B. $2 < 3$, ABER $3 \nless 2$)
  - unnützes Wissen: transitive und reflexive Relationen werden auch Quasiordnung genannt

Gruppenentscheidungen

- Präferenzen
  - Rangabbildungen definieren eine Präferenzrelation $x \,\rho\, y \Leftrightarrow r(x) < r(y)$
  - Relation ρ ist transitiv und asymmetrisch
  - Menge aller (möglichen) darstellbaren Relationen auf A definiert als

$$P_A := \{\ \rho \subset A \times A : \rho \text{ erfüllt } x \,\rho\, y \Leftrightarrow r(x) < r(y) \text{ für eine Rangabbildung } r\ \}$$

  - Erweiterung der Relation durch alle Paare mit gleichem Rang $x \,\rho^*\, y \Leftrightarrow r(x) \leq r(y)$
  - Relation ρ^* ist transitiv und reflexiv
  - es gilt offensichtlich $\rho \subset \rho^*$
  - analog zur Menge P_A lässt sich damit definieren

$$P_A^* := \{\ \rho^* \subset A \times A : \rho^* \text{ erfüllt } x \,\rho^*\, y \Leftrightarrow r(x) \leq r(y) \text{ für eine Rangabbildung } r\ \}$$

Gruppenentscheidungen

- Präferenzen (Fortsetzung)
  - Beispiel: $A = \{x, y, z\}$, $r(x) = 1$, $r(y) = r(z) = 2$

ρ	x	y	z
x		×	×
y			
z			

Erinnerung: $r(\alpha) < r(\beta)$

ρ^*	x	y	z
x	×	×	×
y		×	×
z		×	×

Erinnerung: $r(\alpha) \leq r(\beta)$

  - zwischen beiden Relationen gilt folgende Beziehung: $x \, \rho \, y \Leftrightarrow \neg \, (y \, \rho^* \, x)$
  - Rangabbildungen vor allem für Visualisierungen geeignet (z.B. Fussballtabellen)

Gruppenentscheidungen

- Entscheidungsverfahren
  - Menge der WählerInnen $I := \{1, \ldots, n\}$ bestehend aus Individuen durchnumeriert von 1 bis n
  - jede(r) WählerIn hat persönliche Präferenz P_A
  - gesucht: kollektive Auswahlfunktion K für Präferenz der Gesamtheit

$$K : P_A^n = P_A \times P_A \times \ldots \times P_A \rightarrow P_A$$

  - wesentliche (nichttriviale) Bedingungen
    - Auswahlfunktion K muss total sein $\rightarrow$ für jede mögliche Kombination von (persönlichen) Präferenzen aus P_A muss es eine Gesamtpräferenz (also ein Ergebnis) geben
    - Ergebnis selbst muss wieder eine Relation in P_A sein

Gruppenentscheidungen

- Entscheidungsverfahren (Fortsetzung)
  - Extrembeispiel 1: externer Diktator
    - für beliebiges $\rho_E \in P_A$ gilt $K^E_{\rho_E}(\rho_1, \ldots, \rho_n) := \rho_E$
    - Ergebnis ist offensichtlich Abbildung $P_A^n \to P_A$, aber unabhängig von den ρ_i
    - Verfahren kann kaum als „gerecht“ oder „demokratisch“ bezeichnet werden
  - Extrembeispiel 2: interner Diktator
    - Festlegung eines Individuums $d \in I$, dessen Präferenz ρ_d das Ergebnis bestimmt
    - damit gilt $K^D_d(\rho_1, \ldots, \rho_n) := \rho_d$ unabhängig von den übrigen ρ_i mit $i \neq d$
    - Ergebnis ist ebenfalls Abbildung $P_A^n \to P_A$, aber weder „gerecht“ noch „demokratisch“
  - bessere Verfahren nötig, die Individualpräferenzen „vernünftig“ kollektiv zusammenführen

Gruppenentscheidungen

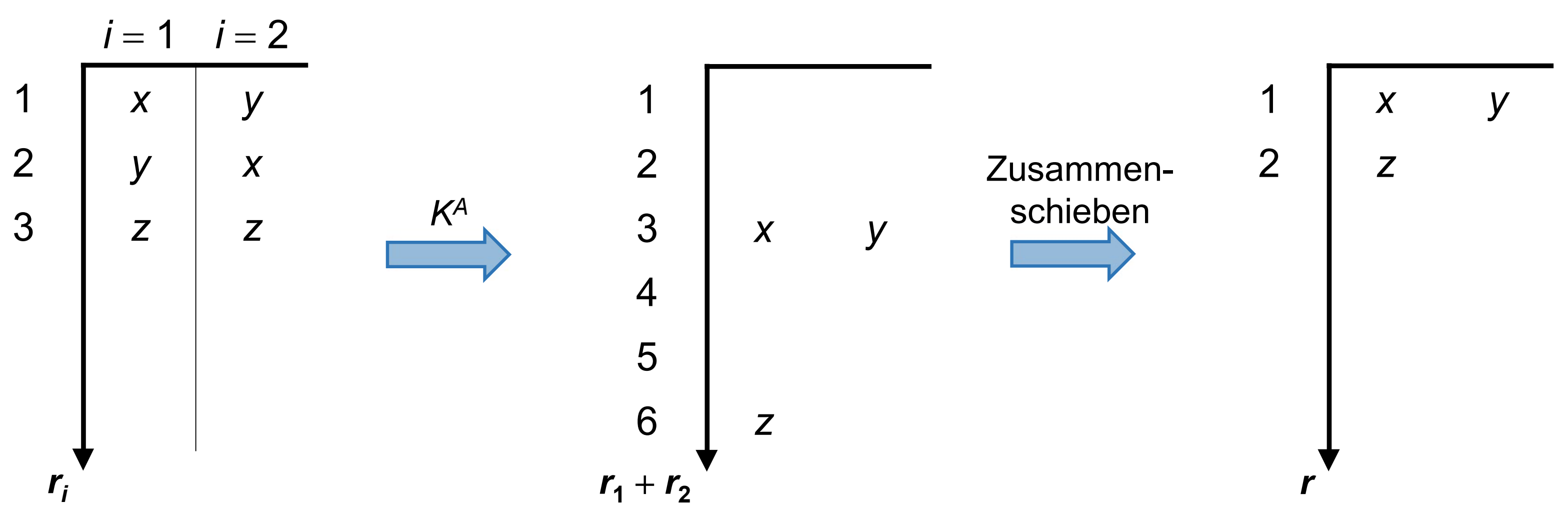
- Entscheidungsverfahren (Fortsetzung)
  - Rangaddition
    - jede Individualpräferenz ρ_i legt eine Rangabbildung fest
    - Idee: kollektive Präferenz aus Rangnummern der jeweiligen Individuen bestimmen
    - einfachste Methode: Addition der Rangnummern
    - für zwei Elemente *x*, *y* gilt: $K^A(\rho_1, \ldots, \rho_n)$ ist Relation ρ mit

$$x \, \rho \, y \Leftrightarrow \sum_{i=1}^{n} r_i(x) < \sum_{i=1}^{n} r_i(y)$$

    - Summe $\Sigma \, r_i$ ist keine Rangabbildung (siehe nachfolgendes Beispiel), kann aber leicht „korrigiert“ werden, sodass gilt $\rho \in P_A$
    - Verfahren hat keine offensichtlichen Nachteile, liefert aber ggf. *unschöne* Ergebnisse

Gruppenentscheidungen

- Entscheidungsverfahren (Fortsetzung)
  - Rangaddition
    - Beispiel: $I = \{1, 2\}$, $A = \{x, y, z\}$



keine Rangabbildung

$\rho \in P_A$

Gruppenentscheidungen

- Entscheidungsverfahren (Fortsetzung)
  - Mehrheitsentscheidung (Condorcet-Verfahren)
    - im direkten Vergleich zweier Elemente $x, y \in A$ gibt es
      - Individuen $\{ i \in I : x \,\rho_i\, y \}$, die x bevorzugen
      - Individuen $\{ i \in I : y \,\rho_i\, x \}$, die y bevorzugen
      - Individuen, die bezüglich x und y indifferent sind
    - Condorcet-Verfahren zählt, wer mehr Vergleiche gewinnt
    - für zwei Elemente x, y gilt: $K^C(\rho_1, \ldots, \rho_n)$ ist Relation ρ mit

$$x \,\rho\, y \Leftrightarrow |\{i \in I : x \,\rho_i\, y\}| > |\{i \in I : y \,\rho_i\, x\}|$$

    - Verfahren für beliebige ρ_i durchführbar, aber Relation ρ im Fall von mehr als zwei Möglichkeiten nicht immer transitiv, d.h. ρ ist keine zulässige Präferenzrelation aus P_A

Gruppenentscheidungen

- Entscheidungsverfahren (Fortsetzung)
  - Mehrheitsentscheidung (Condorcet-Verfahren)
    - Beispiel: $I = \{1, 2, 3\}$, $A = \{x, y, z\}$

	$r_i(x)$	$r_i(y)$	$r_i(z)$	
$i = 1$	1	2	3	$\Rightarrow x < y < z$
$i = 2$	3	1	2	$\Rightarrow y < z < x$
$i = 3$	2	3	1	$\Rightarrow z < x < y$

$\left.\begin{array}{l} \Rightarrow x < y < z \\ \Rightarrow y < z < x \\ \Rightarrow z < x < y \end{array}\right\} \; 2\times\ x < y,\ \ 2\times\ y < z,\ \ 2\times\ z < x$

- damit folgt $x \,\rho\, y$, $y \,\rho\, z$ und $z \,\rho\, x$
- aus der Transitivität folgt schliesslich $x \,\rho\, x \rightarrow$ kein gültiges Ergebnis, d.h. $\rho \notin P_A$

Gruppenentscheidungen

- Entscheidungsverfahren (Fortsetzung)
  - Einstimmigkeit
    - Element x wird Element y vorgezogen $\Leftrightarrow$ alle Individuen teilen diese Präferenz

$$x \, \rho \, y \Leftrightarrow \text{für alle } i \in I : x \, \rho_i \, y$$

    - ABER: ein einziges Individuum, das y mindestens so schätzt wie x (d.h. $y \leq x$), führt zu

$$\begin{aligned} \text{es gibt ein } i \in I : y \, \rho_i^* \, x &\Leftrightarrow \text{es gibt ein } i \in I : \neg(x \, \rho_i \, y) \\ &\Leftrightarrow \neg(x \, \rho \, y) \\ &\Leftrightarrow y \, \rho^* \, x \quad \text{(Minimalkonsens der Gesamtheit)} \end{aligned}$$

    - in der Praxis liefert Verfahren keine echten Präferenzen (zudem: für $|A| > 2 \rightsquigarrow \rho \notin P_A$)
    - Beispiel: $i = 1 : x < y < z$ und $i = 2 : y < z < x \;\Rightarrow\; \rho$ enthält genau ein Paar $y \, \rho \, z \rightarrow \rho \notin P_A$

Gruppenentscheidungen

- Bedingungen an Auswahlverfahren
  - kollektive Auswahlfunktionen $P_A^n \rightarrow P_A$ werden auch von unerwünschten Verfahren erfüllt
  - zwei Bedingungen, die jedes „gerechte“ Verfahren erfüllen sollte
    - Pareto-Bedingung: Gesamtheit (aller Individuen) kann für beliebige Wahlmöglichkeiten durch Einstimmigkeit stets jede gewünschte Rangfolge erzwingen
    - Unabhängigkeit von irrelevanten Alternativen: Rangfolge zwischen zwei Wahlmöglich-keiten kann nicht durch Präferenzänderungen der Individuen im Hinblick auf eine dritte Wahlmöglichkeit gekippt werden
  - Problem: bereits mit diesen zwei Forderungen kein annähernd demokratisches Verfahren mehr möglich ($\rightarrow$ Satz von Arrow)
  - Quintessenz: Demokratie funktioniert nicht…? ☹

Gruppenentscheidungen

- Bedingungen an Auswahlverfahren (Fortsetzung)
  - Pareto-Bedingung (Einstimmigkeit)
    - kollektive Auswahlfunktion $K : P_A^n \to P_A$ erfüllt Pareto-Bedingung, wenn für alle $\rho_i \in P_A$ gilt

$$\text{für alle } i \in I : x \, \rho_i \, y \Rightarrow x \, \rho \, y$$

    - somit scheidet der *externe Diktator* aus, alle anderen Verfahren erfüllen die Bedingung
    - Beispiel: beide Individuen sehen *x*, *y* vor *z*

r_i	$i = 1$	$i = 2$
1	x	y
2	y	x
3	z	z

$\xrightarrow{K}$

r	✓	✓	✓
1	x	y	x y
2	y	x	z
3	z	z	

Gruppenentscheidungen

- Bedingungen an Auswahlverfahren (Fortsetzung)
  - Unabhängigkeit von irrelevanten Alternativen
    - Beispiel: $I = \{1, 2\}$, $A = \{x, y, z\}$ mit Rangaddition K^A als Auswahlverfahren

ρ	$r_i(x)$	$r_i(y)$	$r_i(z)$
$i = 1$	1	2	3
$i = 2$	2	1	3
$\Sigma\, r_i$	3	3	6

Präferenzänderung $\Rightarrow$ Individuum $i = 2$

ρ'	$r_i'(x)$	$r_i'(y)$	$r_i'(z)$
$i = 1$	1	2	3
$i = 2$	3	1	2
$\Sigma\, r_i'$	4	3	5

    - als Gruppenentscheidung bzgl. x und y gilt $y\ \rho'\ x$, aber nicht $x\ \rho\ y$
    - Ergebnis ändert sich, obwohl kein Individuum die Präferenz im direkten Vergleich zwischen x und y ändert ($i = 1$ sieht $x < y$ und $i = 2$ sieht $y < x$)

Gruppenentscheidungen

- Bedingungen an Auswahlverfahren (Fortsetzung)
  - Unabhängigkeit von irrelevanten Alternativen
    - Forderung: Platzierung von dritter Möglichkeit *z* soll keinen Einfluss auf Ergebnis haben
    - oder formal: wenn kein Individuum Präferenz ρ_i, $\rho_i' \in P_A$ bzgl. *x* und *y* ändert, soll gelten

$$(\text{für alle } i \in I : x\,\rho_i\,y \Leftrightarrow x\,\rho_i'\,y) \Rightarrow (x\,\rho\,y \Leftrightarrow x\,\rho'\,y)$$

  - und nun…?
    - Rangaddition somit als „gerechtes“ Verfahren ausgeschlossen
    - Condorcet-Verfahren und Einstimmigkeit liefern für $|A| > 2$ evtl. ungültiges Ergebnis
    - nur *interner Diktator* K^D erfüllt alle Bedingungen

Gruppenentscheidungen

- Satz von Arrow
  - A mit $|A| > 2$ sei eine Menge von Auswahlmöglichkeiten
  - $K : P_A^n \rightarrow P_A$ sei kollektive Auswahlfunktion, die Pareto-Bedingung und Unabhängigkeit von irrelevanten Alternativen erfüllt
  - dann existiert immer ein Diktator

    es gibt ein $d \in I$: für alle $(\rho_1, \ldots, \rho_n) \in P_A$: für alle $(x, y) \in A \times A : x \, \rho_d \, y \Rightarrow x \, \rho \, y$

  - ABER: Diktator ist „grosszügiger" gegenüber anderen Gruppenmitgliedern
    - bei Indifferenz (es gilt weder $x \, \rho_d \, y$ noch $y \, \rho_d \, x$) beliebige Rangfolgen von x, y zulässig
  - Blick über den Teich
    - US-Wahlen haben nur zwei KandidatInnen

Quelle: meine-landkarte.com

Fragen…?